Algebra lineare e Geometria.

→ strumenti dell'algebra lineare : teoria degli spazi vettoriali e dei sistemi lineari

→ applicati alla geometria Euclidea → in dim 2, 3 ... n

Algebra : studio di strutture ; insiemi con operazioni

__Insieme__ → $A, B, C \ldots$ una collezione non ordinata di oggetti priva di ripetizioni.

→ predicato di appartenenza $x \in A$

"x appartiene ad A"

→ dato un insieme è sempre possibile estrarre da esso un elemento ben preciso che vi appartiene.

__Def__ Siano A, B insiemi. Si dice $A \subseteq B$ — A sottoinsieme di B. — se e solo se $\forall a \in A : a \in B$.

per ogni

$A = B \iff A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A$

se e solo se

contenuto

$\iff \forall a \in A : a \in B \;\&\; \forall b \in B : b \in A$

~~$\iff \{ \forall a \in A$~~ :

$\emptyset$ è un insieme ed è l'insieme tale che

$$\forall a : a \notin \emptyset$$

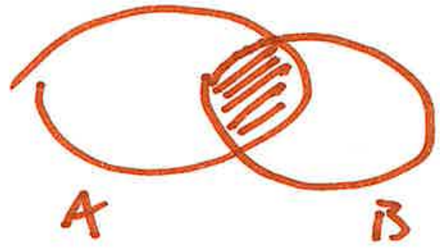
non appartiene.

N.B. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

$\emptyset \subseteq A$ per ogni insieme A.

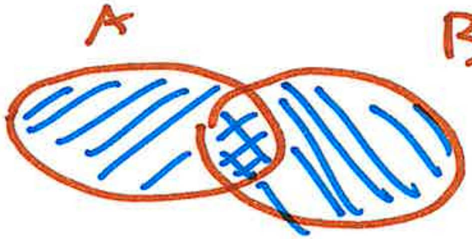
DATI A, B insiemi

$$A \cap B := \{\underset{\sim\sim\sim}{x \in A} : x \in B\}.$$

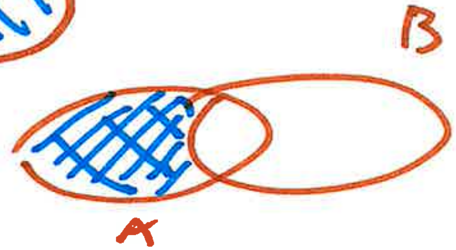


$\uparrow$ uguale per definizione

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}.$$



$$A \setminus B := \{a \in A : a \notin B\}.$$



Insieme: collezione non ordinata di ogg. senza ripetizioni.

Coppia ordinata

$$(a,b) \neq (b,a)$$

$$(a,a) \neq (a,b) \neq (b,b)$$

Definizione $(a,b) := \underbrace{\{\{a,b\},\{a\}\}}$.

$(a,b) := \{\{a,b\},\{a\}\}$.

$(b,a) := \{\{a,b\},\{b\}\}$

se $a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$

$(a,a) = \{\{a,a\},\{a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Siano A, B due insiemi. Definiamo

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

prodotto cartesiano.

Relazione fra 2 insiemi A, B.

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

è detta relazione fra A e B.

- $\mathcal{R}$ é ovunque definita se $\forall a \in A \ \exists b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}$ è funzionale se $\forall a \in A \ \exists_{\leq 1} b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}$

  esiste al più uno.

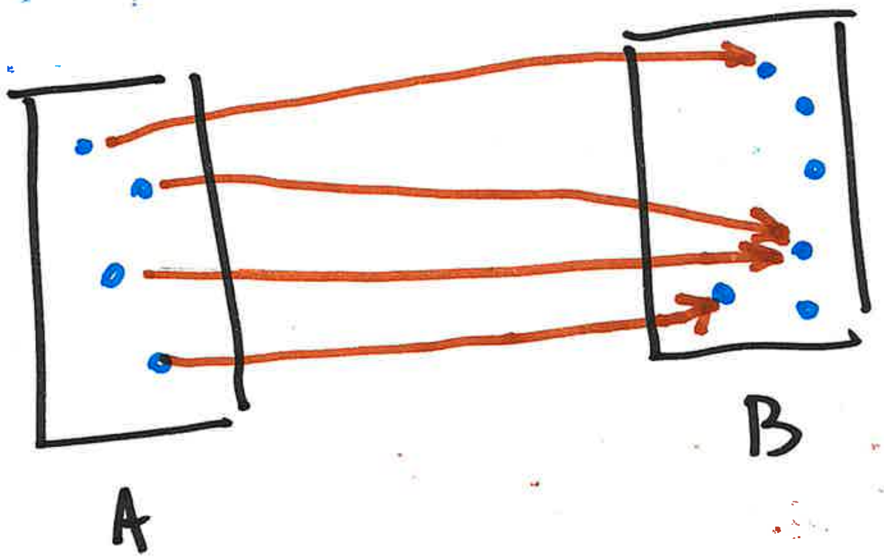
- $\mathcal{R}$ è una <u>funzione</u> di <u>dominio A</u> e <u>codominio B</u>

  se è ovunque definita e funzionale.

  $$\forall a \in A \ \exists ! \, b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}.$$

  esiste ed é unico.

$R(a) = b$ significa $(a,b) \in R$.



Sia $f: A \to B$ una funzione ed $X \subseteq B$.

~~possiamo~~

poniamo $f^{-1}(X) := \{a \in A : f(a) \in X\}$.

"retroimmagine di X".

In generale f^{-1} non è una funzione!

Una funzione $f: A \to B$ è detta

- iniettiva se $\forall b \in B \ \exists_{\leq 1} a \in A : f(a) = b$
- suriettiva se $\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$
- biiettiva se iniettiva e suriettiva
  $\forall b \in B \ \exists! a \in A : f(a) = b$

~~Teorema~~ Def: $f: A \to B$ funzione è detta invertibile $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$ tale che $\forall b \in B: f(g(b)) = b$ & $\forall a \in A: g(f(a)) = a$

Teorema: f è invertibile $\Leftrightarrow$ f è biiettiva.

DIM: f^{-1} deve essere una funzione!

<u>Def</u>: Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ due funzioni

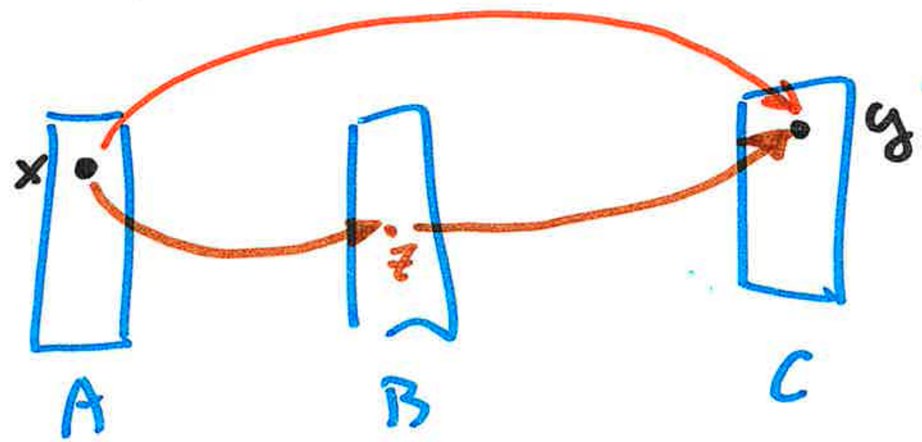
Si dice composizione di f e g la

funzione $(g \circ f): A \longrightarrow C$

data da $(x,y) \in (g \circ f) \subseteq A \times C$

se e solamente se $\exists z \in B$ tale

che $(x,z) \in f$ e $(z,y) \in g$



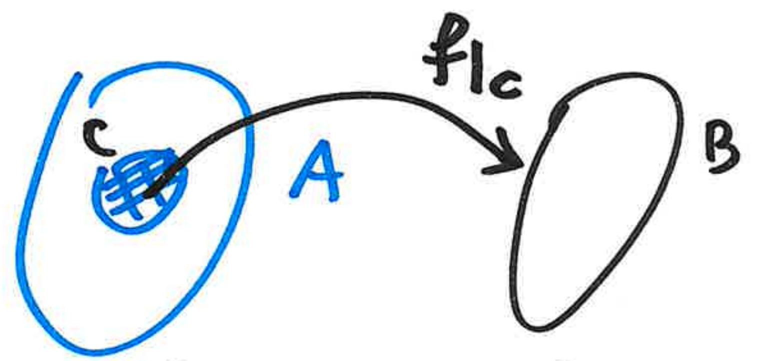
$g(f(x))$.

OSS: g deve avere come dominio esattamente il codominio di A.

COSA FARE ALTRIMENTI?

A) Restrizione $f: A \to B$ $C \subseteq A \Rightarrow$

$$f|_C := \{(c,b) : (c,b) \in f, c \in C\}.$$



$$f|_C : C \to B$$

B) Troncamento $f: A \to B$

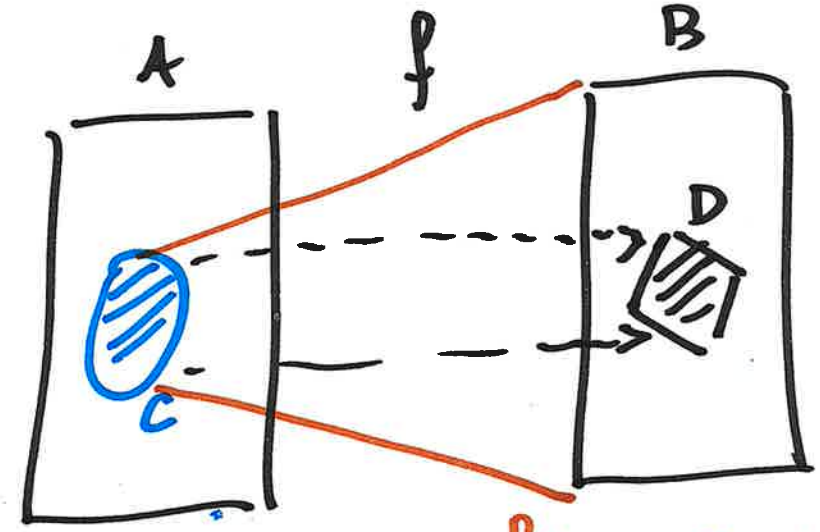
C con $C \subseteq B$ ed

$Im(f) := \{b \in B : \exists a \in A : f(a) = b\}$. $\subseteq C$.

$$Im\, f \subseteq C \subseteq B$$

Troncamento di f a C : $f^{|C} : A \to \underline{C}$

tale che $(a,b) \in f^{|C} \iff (a,b) \in f$.



$f : \underline{\underline{A}} \to \underline{\underline{B}}$

$f|_C : \underline{\underline{C}} \to B$

$f|_C^{|D} : C \to \underline{\underline{D}}$

La composizione di funzioni è <u>associativa</u>!

$f: A \to B \quad g: B \to C \quad h: C \to D$ funzioni

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ associativa.

N.B.: $f: A \to A$ $\Rightarrow$ ha senso considerare
$g: A \to A$

$$(g \circ f) \neq (f \circ g)$$

in generale la composizione di funzioni NON È COMMUTATIVA!!

f: $(1,1), (2,3), (3,2)$

g: $(1,2), (2,3), (3,1)$

$g \circ f$: $(1,2), (3,1), (2,3)$

$f \circ g$: $(1,3), (2,2), (3,1)$

N.B.:

Indichiamo con $id_A : A \longrightarrow A$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a \longrightarrow a$

funzione identica.

Se $f : A \to B$ invertibile, scriviamo $f^{-1} : B \to A$ per la sua funzione inversa.

Abbiamo $\quad f^{-1} \circ f : A \to A = \cancel{id_B}\ id_A$

$\qquad\qquad\quad f \circ f^{-1} : \cancel{A \to} B \to B = id_B$

Sia adesso A un insieme. Una operazione (binaria) su A è una funzione $f : A \times A \to A$

Esempio $A = \mathbb{N}$, $+\begin{cases} A \times A \longrightarrow A \\ (a,b) \to a+b \end{cases}$

$A = \mathbb{Z}$, $-\begin{cases} A \times A \longrightarrow A \\ (a,b) \to a-b \end{cases}$

$A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$\cdot\begin{cases} A \times A \to A \\ (a,b) \to a \cdot b \end{cases}$

Non é operazione $-\begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (a,b) \to a-b \end{cases}$

é operazione $\dot{-}\begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (a,b) \to \max(0, a-b). \end{cases}$

Def.: Si dice <u>struttura algebrica</u> una n-upla formata da un insieme A e da una o più operazioni definite su di esso.

Es. $(\mathbb{N}, +)$